和

令和４年度 秋季募集
(令和５年４月入学)

東北大学大学院工学研究科
量子エネルギー工学専攻入学試験

試験問題冊子

数学Ｂ　MATHEMATICS B

令和４年８月 30 日(火)　13:00 － 14:30

注意

１．本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．

２．試験問題冊子，答案用紙および草案用紙が配布されるので，答案用紙および草案用紙に受験番号を記入すること．

３．**<u>３問中２問を選択し解答すること</u>**．問題ごとに 2 枚の答案用紙を用いること．また，答案用紙には選択した問題番号を明記すること．

４．試験終了後，提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること．答案用紙を番号順に草案用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

数 学 B　MATHEMATICS B

1．　次の常微分方程式の一般解を求めよ．

（1）　$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 3e^{-x} + \cos x$$

（2）　$$\frac{dy}{dx} + y = 3e^{x}y^{3}$$

（3）　$$\{(1 + x^2)y + 1\}dx + x(1 + x^2)dy = 0$$

数 学B　MATHEMATICS B

2．$0 < x < 1$で定義される実関数$u(x,t)$が，偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x) \tag{A}$$

および境界条件

$$u(x,0) = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = u(0,t) = u(1,t) = 0$$

を満足するものとする．以下の問いに答えよ．

（1） $-1 \leq x < 1$で定義される周期２の関数

$$g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

を

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{p_n \cos(n\pi x) + q_n \sin(n\pi x)\}$$

とフーリエ級数展開したときのフーリエ係数p_nおよびq_nを求めよ．

（2） $u(x,t)$は

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(n\pi x) \tag{B}$$

とフーリエ正弦展開できるものとする．ただし

$$u_n(t) = \int_0^1 u(x,t) \sin(n\pi x)\, dx$$

とする．また式（A）における$f(x)$は問（１）の$g(x)$で表されるとする．式（B）を式（A）に代入し，さらに問（１）の結果を用いることで，$u_n(t)$ が満たすべき常微分方程式を表せ．

（3） 問（２）にて用いた$u_n(t)$が$u_n(t) = a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t) + c_n$と表せると仮定したとき，問（２）にて得られた常微分方程式を満たすc_nを求めよ．

（4） 問（２）および問（３）の結果を用いて，$u(x,t)$を求めよ．

3．関数 $y(t)$ のラプラス変換を次のように定義する．

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \int_0^\infty y(t)\,e^{-st}dt$$

$y(t)$ に対する微分積分方程式を

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) + 2\int_0^t y(u)du = f(t), \qquad y(0) = 1$$

とし，以下の問に答えよ．

（1）$\mathcal{L}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)$ および $\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(u)du\right\}$ を各々 $Y(s)$ を用いて表せ．ただし，$\lim_{t\to\infty} y(t)\,e^{-st} = 0$ および $\lim_{t\to 0+} \int_0^t y(u)du = 0$ とする．

（2）$f(t) = 0$ のとき，$y(t)$ をラプラス変換により求めよ．

（3）$f(t) = h(t-1) - h(t-2)$ のとき，$y(t)$ をラプラス変換により求めよ．ただし，$h(t)$ は以下で与えられる．

$$h(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{1}{2} & (t = 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$$

なお，必要であれば

$$\mathcal{L}^{-1}\{\,e^{-as}Y(s)\} = h(t-a)y(t-a)$$

を用いよ．ここで，aは定数である．